УДК 534. 01 (09)

Ларин А. А.

СТАНОВЛЕНИЕ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Колебательные процессы в механике, как, впрочем, и в других областях науки, занимают особое место. Колебания, возникающие при работе машин и механизмов, могут не только нарушить нормальный режим их эксплуатации, но и привести к разрушению. Колебания также оказывают вредное воздействие на людей, связанных с эксплуатацией техники.

Еще в XIX веке изучению механических колебаний не придавалось особого значения, и расчеты на прочность велись в статической постановке, так как машины того времени были еще тихоходными и маломощными. В эпоху становления техники человечество редко сталкивалось с явлением резонанса. Так в 1850 году Анжерский подвесной мост рухнул в пропасть от проходящего по нему пехотного батальона, потому, что солдаты шли в ногу, отбивая при этом шаг. С тех пор во всех армиях было введено правило по мосту идти не в ногу и не чеканить шаг. Однако спустя более пятидесяти лет в 1909 году в Петербурге рухнул подвесной Египетский мост через реку Фонтанку в тот момент, когда по нему проходил эскадрон лейб-гвардии Кавалергардского полка. Хорошо обученные лошади шли в ногу, и частота ударов копыт совпала с собственной частотой колебаний моста. Погибло около 40 человек.

К концу XIX века, с ростом скоростей и уменьшением габаритов машин пренебрегать колебаниями стало невозможно. Многочисленные аварии, происходившие от наступления резонанса или усталостного разрушения при колебаниях, заставили инженеров обратить внимание на колебания. Так поломка гребного вала на корабле часто сопровождалась и поломкой паровой машины. 25 марта 1890 года на громадном роскошном пароходе "City of Paris", шедшем из Англии в Америку, произошла поломка вала вследствие его изгибных колебаний. При этом огромная в 9000 л.с. паровая машина (рис. 1) разлетелась на куски (рис. 2), а ее обломки повредили вторую машину, стоявшую рядом, и пробили борт корабля, вследствие чего было затоплено все машинное отделение. Пароход остался без движения с 1000 пассажиров на борту в 200 милях от берега и только случайно был обнаружен проходившим мимо судном, отбуксировавшим его в Англию [1, с. 11–14].

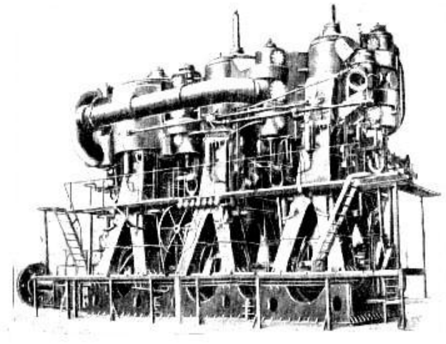

рис. 1

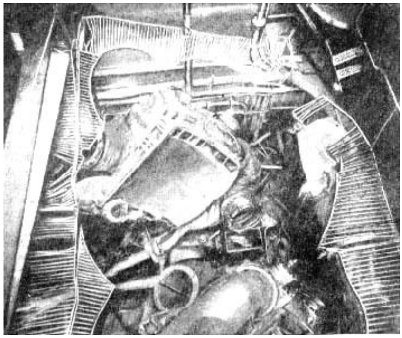

рис. 2

Теория механических колебаний выделилась в отдельную отрасль науки из теоретической и аналитической механики. Начало исследования колебаний связано с именем Галилея. Во время мессы во Флорентийском соборе он заметил тот факт, что частота колебаний огромного паникадила, подвешенного к куполу собора, не зависит от их амплитуды. Свойство маятника сохранять частоту свободных колебаний при малых отклонениях было проверено Галилеем на опытах и легло в основу учения о колебательном движении. Смерть помешала Галилею довести свои исследования до конца и лишь через 30 лет Христиан Гюйгенс в сочинении «Horologium oscillatorium» изложил полную теорию движения маятника и построил первые часы с маятником. В том же сочинении Гюйгенс указал и другое применение математического маятника – определение ускорения свободного падения. В 1657 году Гюйгенс получил патент Генеральных штатов (правительства) Голландии на изобретенные им маятниковые часы со "свободным спуском".

В 1687 году вышло в свет гениальное сочинение Исаака Ньютона «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математические начала натуральной философии») в котором он заложил основы теоретической механики, применив ее к изучению движения небесных тел. Там же Ньютон привел теорему, дающую возможность по наблюдениям затухания колебаний маятника получить закон сопротивления его движению [1, с. 174–179].

Основополагающей для теории колебаний явилась работа Л. Эйлера «Scientia Navalis» («Корабельная наука»), изданная в 1743 г. В ней заложены основы теории статической устойчивости и теории малых колебаний [2, с. 359]. Большой вклад в основы теории колебаний внес д’Аламбер, который в своих многочисленных трудах рассмотрел отдельные задачи, такие как колебания маятника, плавающего тела, пружины и т.д. В книге “Mécanique analytique” («Аналитическая механика»), изданной в 1788 г. Лагранж подвел итог всему, что было сделано в механике в XVIII веке, и сформулировал новый подход к решению ее проблем. В учении о равновесии он отказался от геометрических методов статики и предложил принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа). В динамике Лагранж, применив одновременно принцип д'Аламбера и принцип возможных перемещений, получил общее вариационное уравнение динамики (принцип д'Аламбера – Лагранжа). Наконец, он ввел обобщенные координаты и получил уравнения движения в наиболее удобной форме – уравнения Лагранжа II рода.

Эти уравнения стали основой для создания теории малых колебаний, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. В дальнейшем она получила название теории линейных колебаний. Линейность редко присуща механической системе, а в большинстве случаев является результатом ее упрощения. Простота теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих колебания, обусловила их широкое распространение в технике. Рассматривая малые колебания вблизи положения равновесия, которые осуществляются с малыми скоростями, можно в уравнениях движения отбросить члены второго и высших порядков относительно обобщенных координат и скоростей. Тогда для системы с s степенями свободы кинетическая и потенциальная энергии записываются как квадратичные формы обобщенных скоростей и обобщенных координат

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_i q_j, \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – инерционные, а $c_{ij} = c_{ji}$ – упругие или квазиупругие коэффициенты системы. Применяя уравнения Лагранжа для консервативных систем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \tag{2}$$

получают систему s линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_j = -\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_j, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \tag{3}$$

Частное решение (3) ищется в виде

$$q_j = A_j \sin(kt + \alpha), \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{4}$$

и описывает моногармонический колебательный режим с частотой k, одинаковой для всех обобщенных координат, причем частоту k и амплитуды A_j надо найти. Дифференцируя (4) дважды по t и подставляя результат в уравнения (3), получим систему линейных однородных уравнений для нахождения амплитуд

$$\sum_{j=1}^{s} \left(c_{ij} - k^2 a_{ij}\right) A_j = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{5}$$

или в матричной форме

$$\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}k^2\right)\vec{A} = 0 \ , \tag{6}$$

где **I** и **C** – матрицы соответственно инерции и жесткости, компонентами которых будут инерционные и упругие коэффициенты, а $\vec{A}$ - вектор (матрица-столбец) амплитуд колебаний. Поскольку при колебаниях системы все амплитуды не могут равняться нулю, должен быть равен нулю определитель, состоящий из коэффициентов системы (6)

$$\det\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}k^2\right) = 0 \ . \tag{7}$$

Уравнение вида (7) впервые рассмотрели Лагранж и Лаплас в теории вековых возмущений элементов планетных орбит, и поэтому оно получило название векового уравнения (оно также называется уравнением частот).

Вековое уравнение является уравнением s-й степени относительно k^2, число его корней равно числу степеней свободы системы, а корни принято располагать в порядке возрастания $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, при этом они образуют спектр собственных частот, а s амплитуд $A_{1j}, A_{2j}, \ldots A_{sj}$ представляют собой j-ю форму колебаний. Каждому корню k_i соответствует частное решение вида (4), а общее решение представляет собой сумму таких решений.

Вместе с тем в «Аналитической механике» Лагранж повторяет ошибку, допущенную д’Аламбером в 1761 г., о том, что кратные корни векового уравнения соответствуют неустойчивому решению, так как якобы при этом в решении появляются члены, содержащие t не под знаком синуса или косинуса. В связи с этим д’Аламбер и Лагранж считали, что уравнение частот не может иметь кратных корней (парадокс д’Аламбера – Лагранжа). Научный авторитет д’Аламбера и Лагранжа был так высок, что эту ошибку повторили Лаплас и Пуассон, а исправили ее только лишь спустя почти 100 лет независимо друг от друга в 1858 году К. Вейерштрасс и через несколько месяцев в 1859 году О. И. Сомов.

Русский математик и механик Осип Иванович Сомов (1815-1876) внес большой вклад в развитие теории колебаний дискретных систем [3, с. 56]. Особо важное место в его творчестве занимает работа «Sur l'equation algébrique á l'aide de laquelle on détermine les oscillations trés petites d'un systéme de points matériels», опубликованная в Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg. т.1 №14 (1859) (подробное изложение статьи «Об алгебраическом уравнении с помощью которого определяются малые колебания системы материальных точек» в переводе с французского приведен в [3, с. 60-74]). В ней Сомов показал, что корни векового уравнения вещественны и положительны. Кратные корни в нем возможны и не приводят к неустойчивости движения, так как речь идет не об одном уравнении, а о системе уравнений. Сомов также рассматривает случай, когда корень равен нулю. Тогда искомая функция растет со временем, т.е. равновесие является неустойчивым, что, однако, не противоречит теореме Лагранжа-Дирихле, так как она в этом случае неприменима, ибо потенциальная энергия не имеет при нулевых значениях координат изолированного минимума [3 с. 74]. Таким образом, Сомовым внесен большой вклад в формирование теории малых колебаний линейных систем. Рэлей отмечал, что впервые аналитическая теория общего случая свободных колебаний (где координаты не являются нормальными) была разобрана Сомовым [4, с. 131].

Таким образом, для определения частот и форм свободных колебаний линейной системы без сопротивления требуется решить вековое уравнение, представляющее собой алгебраическое уравнение высокой степени. Решением таких уравнений занимались многие астрономы и математики, в том числе Лаплас, Лагранж, Леверрье, Эйлер и др. Пытаясь отыскать формулу для решения в радикалах уравнения s-й степени, Эйлер нашел общий вид корней для любого уравнения степени не выше четвертой. Однако свести общее буквенное уравнение пятой степени к уравнениям низших степеней ему не удалось. В 1770-71 гг. Лагранж предпринял систематическое исследование всех методов решения и пришел к выводу: "Очень сомнительно, чтобы методы … могли бы дать полное решение уравнения 5-й степени" [5, с. 138-139]. В 1799 году итальянский математик П. Руффини (с пробелами), а в 1826 году норвежский математик Н.Г. Абель (полностью) доказали, что алгебраические уравнения степени выше четвертой с буквенными коэффициентами не решаются в радикалах. В 1829 г. Ж. Штурм предложил свой метод для отделения корней уравнения. В «Лекциях по алгебраическому и трансцендентному анализу» (1837 г.) Остроградский проанализировал, упростил и изложил важнейшие методы, начиная от метода Ньютона и кончая методом Штурма [5, с. 140].

Однако проблемой было не только решение векового уравнения, но и составление его, так как развернутый определитель (7) имеет $s!$ слагаемых, например, для системы с 10-ю степенями свободы их будет $3\ 628\ 800$. В связи с этим разрабатывались также матричные методы решения векового уравнения. Переписав равенство (6) в виде

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{C}\vec{A} = k^2\vec{A}, \qquad (8)$$

заметим, что матрица-столбец $\vec{A}$ является собственным вектором матрицы

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{C}, \qquad (9)$$

а k^2 ее собственным значением. В 1846 г. Карл Густав Якоб Якоби для решения полной проблемы собственных значений предложил в статье «Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstorungen Vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen» итерационный метод вращений [6, с. 182]. Метод основан на такой бесконечной последовательности элементарных вращений, которая в пределе преобразует матрицу (9) в диагональную. Диагональные элементы полученной матрицы и будут искомыми собственными значениями. Однако для определения собственных значений требуется $30n^3$ арифметических операций, а для собственных векторов еще $20n^3$ операций [7, с.181]. В связи с этим метод в XIX веке не нашел применения и был востребован только через сто лет. В работе [8] А.Н. Крылов критически проанализировал методы Лапласа, Лагранжа, Леверрье и Якоби, нашел их «сложными и неудобными» и предложил свой метод, основанный на такой записи векового уравнения, где k^2 фигурирует только в первом столбце. Метод А.Н. Крылова требует значительно меньшего числа операций для записи векового уравнения.

Следующим важным шагом в развитии теории колебаний были работы Рэлея, особенно его фундаментальный труд «Теория звука» («The theory of sound»), впервые опубликованный в 1877 году и изданный на русском языке только в 1940-44 и 1955 годах [4]. В этой книге Рэлей с единой точки зрения рассматривает колебательные явления в механике, акустике и электрических системах. Основное и непреходящее значение «Теории звука» состоит в том, что она является первым систематическим изложением общего учения о колебаниях. В ней подытожены предшествующие достижения в этой области и намечены ряд проблем и направлений для развития теории колебаний [4, предисловие редактора, с. 10]. Рэлею принадлежит ряд фундаментальных теорем линейной теории колебаний (теоремы о стационарности и свойствах собственных частот), которые были опубликованы в большой работе «Some General Theorems

Relating to Vibrations» («Некоторые общие теоремы, касающиеся колебаний») в 1873 году и обобщены в «Теории звука» [4, с.131–140]. Там же Рэлей сформулировал принцип взаимности [4, с.174–175]. По аналогии с кинетической и потенциальной энергией он ввел диссипативную функцию

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{10}$$

которая является однородной квадратичной функцией скоростей, положительной для всех значений переменных. Функция получила имя Рэлея и представляет собой половину скорости с которой рассеивается энергия [4, с. 122–124].

В «Теории звука» Рэлей также предлагает приближенный метод определения первой собственной частоты консервативной системы [4, с. 132]

$$k_1^2 = \Pi_{\max} \big/ T^*_{\max}\ , \text{где } T^*_{\max} = T_{\max} \big/ k^2 . \tag{11}$$

При этом для вычисления максимальных значений потенциальной (П) и кинетической (*T*) энергий берется некоторая форма колебаний. Если она совпадет с первой формой колебаний системы, мы получим точное значение первой собственной частоты, а в противном случае это значение всегда завышено [9, с.174]. Метод дает вполне приемлемую для практики точность, если в качестве первой формы колебаний взять статическую деформацию системы.

Таким образом, еще в XIX веке в трудах О.И. Сомова и Рэлея сформировалась методика построения дифференциальных уравнений, описывающих малые колебательные движения дискретных механических систем с помощью уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j(t), \quad (j = 1, 2, \dots, s), \tag{12}$$

где в $Q_j(t)$ должны быть включены все силы, за исключением упругих и диссипативных, охваченных функциями *R* и П.

Уравнения Лагранжа (12), описывающие вынужденные колебания после подстановки всех функций в матричной форме выглядят так

$$\mathbf{I}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}\dot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = \vec{Q}(t)\,. \tag{13}$$

Общее решение данного уравнения состоит из свободных и сопровождающих колебаний, которые всегда являются затухающими и вынужденных колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы. Ограничимся рассмотрением только частного решения, соответствующего вынужденным колебаниям. В качестве возбуждения Рэлей рассматривал обобщенные силы, изменяющиеся по гармоническому закону. Многие относили этот выбор к простоте рассматриваемого случая, однако Рэлей приводит более убедительное объяснение – ряд Фурье. Теорему Фурье о разложении произвольной функции в ряд по тригонометрическим функциям Остроградский считал чрезвычайно важной, стоящей в ряду первейших открытий времени [5, с. 182]. Используя разложение обобщенных сил в ряд Фурье

$$Q_j(t) = \sum_{i=1}^{N} Q_{j_i}^{c} \cos(i\omega t) + Q_{j_i}^{s} \sin(i\omega t), \quad (j = 1, 2, \dots, s) \tag{14}$$

и принцип суперпозиции, запишем решения в виде

$$q_{ji} = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}^{c} \cos(i\omega t) + A_{ji}^{s} \sin(i\omega t), \quad j = 1, 2, \dots, s \tag{15}$$

При поочередной подстановке (15) в (13), получим для каждой гармоники систему 2*s* линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \left(\mathbf{C} - \mathbf{I}\omega^2\right)\vec{A}^{s} - \mathbf{B}\omega\,\vec{A}^{c} = \vec{Q}^{c}; \\ \mathbf{B}\omega\,\vec{A}^{s} + \left(\mathbf{C} - \mathbf{I}\omega^2\right)\vec{A}^{c} = \vec{Q}^{s}. \end{cases} \tag{16}$$

В книгах по теории звука главное внимание уделяется свободным колебаниям, а вынужденным колебаниям отводится мало места, тогда как именно они играют более важную роль в механических системах. Внедрение в практику инженерных расчетов вынужденных колебаний связано с именами С.П. Тимошенко [10] и А.Н. Крылова [1]. Их работы ознаменовали переход теории колебаний механических систем из разряда чисто математических наук в науку прикладную. До применения вычислительной техники уравнения (16) для систем с достаточно большим числом степеней свободы не могли быть решены численно. Поэтому задача о вынужденных колебаниях на резонансных режимах решалась с помощью метода энергетического баланса. Для нерезонансного режима, когда можно пренебречь сопротивлением, А.Н. Крылов в 1905 г. в работе «Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastichen Stäben» предложил метод, основанный на разложении решения в ряд по собственным формам колебаний [9, с. 144]. И.М. Бабаков усовершенствовал этот метод, введя динамические коэффициенты влияния [9, с. 147].

В 1930-х годах возникла необходимость выделения теории колебаний в отдельную учебную дисциплину. Впервые курс теории колебаний был прочитан Л.И. Мандельштамом в Московском университете в 1930-32 гг., однако он касался в основном колебательных процессов в физике. В 1936 г. был опубликован капитальный труд А.Н. Крылова «Вибрация судов» [1], являвшийся учебным руководством для кораблестроительных втузов. При написании этой книги А.Н. Крылов частично использовал изданные им в 1907 г. в литографированном виде лекции в Петербургском политехническом институте по курсу «Вибрация судов», а также полностью включил в нее свои ранее опубликованные работы. Отличительной особенностью этого курса была практическая целеустремленность, и вместе с тем, применяемые средства математического анализа развиваются и обобщаются в нем до такой степени и глубины, что этот труд может быть отнесен и к области общей прикладной математики [1, Предисловие комиссии по изданию трудов, с. 3].

В 1930 г. в Харьковском механико-машиностроительном институте была открыта специальность динамика и прочность машин, на которой готовились кадры для научно-исследовательских институтов и заводских КБ [11, с. 20]. Для новой специальности профессор И.М. Бабаков создал и долгое время читал курс теории колебаний. Этот курс был оформлен в виде фундаментального учебника, вышедшего в свет в 1958 году. Этот учебник многократно переиздавался и в наши дни не потерял своей актуальности. В 2004 г. в России начала выходить серия монографий «Классики отечественной науки», посвященная всем отраслям знаний. Второй книгой в этой серии издана «Теория колебаний» И.М. Бабакова [12].

В 1930-х годах киевские ученые Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов занимались внедрением теории нелинейных колебаний в практику и создали новое научное направление – нелинейную механику [13]. В монографии [14] было дано систематическое изложение асимптотических методов.

Становление теории колебаний механических систем как науки и учебной дисциплины можно считать законченным к 30-м годам XX века. С широким внедрением вычислительной техники в проведение расчетов колебаний оказалось возможным применение моделей с большим числом степеней свободы, рассмотрение существенно нелинейных систем, решение задач оптимизации, случайных процессов и т.д. Теория механических колебаний в настоящее время представляет собой самостоятельное направление в механике и позволяет не только исследовать колебательные процессы в условиях эксплуатации или доводки машин и сооружений, но и прогнозировать их вибрационные свойства на этапе конструирования. Таким образом, теория колебаний служит научной основой решения многих практических задач, имеющих большое значение.

Литература

1. Крылов А.Н. Вибрация судов. Собрание трудов т. X. – М–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 402 с.

2. Моисеев Н.Д. Очерки развития механики. – М.: Изд-во МГУ, 1961. – 478 с.

3. Геронимус Я.Л. Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: Гостехиздат, 1952. – 519 с.

4. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей) Теория звука, т. I. М.: Гостехиздат, 1955. – 504с.

5. Михаил Васильевич Остроградский 1 января 1862 - 1 января 1962. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности под ред. И.Б. Погребысского и А.П. Юшкевича – М.: Гос. изд-во физ-мат. литературы, 1961. – 399 с.

6. Уилкинсон, Райнш Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.

7. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

8. Крылов А.Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // Изв. АН СССР. – 1931. –№ 4 С. 491-539

9. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

10. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле. М.: ОНТИ, 1934. – 534 с.

11. Морачковский О.К. Инфиз: очерки истории творчества. – Х.: Энерго Клуб Украины, 2005. – 372 с.

12. Бабаков И.М. Теория колебаний // Серия «Классики отечественной науки» /издание четвертое, исправленное.- М: Дрофа, 2004.- 592 с.

13. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биогр. Справочник. – К.: Наук. думка, 1983. – 640 с.

14. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику.– К.: Изд. АН УССР.– 1937.– 321 с.